Приклади розв'язування задач на інваріанти

В деяких задачах з математики дається набір перетворень вихідного об'єкта і запитується: чи можна, використовуючи ці перетворення, отримати з одного стану об'єкта інший? Перебором варіантів часто легко переконатися в правильності відповіді "не можна", однак обґрунтувати цю відповідь буває важко. Метод, що дозволяє в багатьох випадках вирішувати доказову частину таких задач, є метод інваріантів. Інваріантом називається щось, що не змінюється в перетвореннях, наприклад, число, набір чисел, парність якого-небудь числа, інше. Якщо значення інваріанта в двох станах об'єкта різна, то одне з них не можна отримати з іншого. У якості інваріанта найчастіше розглядаються парність (непарність) чисел і залишок від ділення. Причому застосування парності – зустрічаються найчастіше при розв'язуванні олімпіадних задач.

Згадаймо визначення парного і непарного числа. Особливу увагу треба приділити абстрактному поняттю парності, пояснити, що таке «різна парність». Наприклад, число х=2 має ту ж парність, що і число х (або обидва парні, або обидва непарні), а при додаванні одиниці парність змінюється. Застосування ідеї парності і непарності засноване на двох важливих твердженнях (лемах):

Лемма 1.

Парність суми декількох цілих чисел збігається з парністю кількості непарних доданків.

Приклад 1. Кенгуру стрибає уздовж прямої. Довжина кожного стрибка дорівнює 1 м. Чи може кенгуру, перебуваючи в деякій точці прямої, за 101 стрибків знову повернутися у цю ж точку?

Розв'язання. Якби кенгуру повернувся у початкову точку, то кількість стрибків в один бік дорівнювала б кількості стрибків у протилежний бік і загальна кількість стрибків була б парною. Число 101 непарне, тому кенгуру за 101 стрибків повернутися у ту саму точку не може.

Приклад 2. На дошці написані числа 1, 2, 3, …, 11. Дозволяється стерти будь-які два числа і написати їхню суму, зменшену на 1, тобто, якщо стерли числа a і b, то можна написати число $a+b-1$. Повторивши таку операцію 10 разів, одержимо одне число. Знайти це число.

Розв'язання. Якщо замість чисел a і b написати число $a+b-1$, то сума усіх чисел на дошці зменшиться на 1. Знайшли інваріант: сума усіх чисел на дошці після кожної операції зменшується на 1.

Початкова сума: 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11=66. За 10 операцій сума зменшиться на 10 і дорівнюватиме 56.

Отже, єдине число, яке залишиться на дошці, — число 56.

Приклад 3. На столі стоять 9 чашок — усі догори дном. Дозволяється за один хід перевернути будь-які 4 чашки. Чи можна за кілька таких ходів домогтися того, щоб усі чашки стояли дном донизу?

Розв'язання. Якщо перевернути 4 чашки, то для них можливі такі варіанти:

Було догори дном	Стане догори дном
4	0
3	1
2	2
1	3
0	4

Кількість чашок, які стоять догори дном або не змінюється, або збільшується чи зменшується на парне число. Отже, парність кількості таких чашок не змінюється. Оскільки спочатку їх була непарна кількість (9), то одержати парну кількість (0) неможливо.

Приклад 4. Від шахової дошки розміром 8*8 вирізали крайню верхню ліву і крайню нижню праву клітинки. Чи можна решта дошки замостити кісточками доміно, покриваючи однією кісточкою рівно дві клітинки дошки?

Розв'язання. Щоб покрити 62 клітинки решта дошки, потрібні 31 кісточки доміно, які можуть покрити однакову кількість чорних і білих клітинок. Оскільки вирізані клітинки мають однаковий колір, то залишилася різна кількість чорних і білих клітинок. Отже, решта дошки замостити кісточками доміно не можна.

Приклад 5. На чудо-дереві ростуть 25 ананасів та 10 кокосів. Протягом одного дня дозволяється одночасно зірвати з нього два плоди. Якщо зірвати два ананаси або два кокоси, то відразу виростає ще один кокос, а якщо зірвати один ананас та один кокос, то виростає один ананас. Через скільки днів на дереві залишиться один плід? Який це плід?

Розв'язання. Кожного дня кількість плодів зменшується на 1, тому на 35-й день залишиться один плід. За один день число ананасів або зменшується на 2, або не змінюється. Спочатку була непарна кількість (25) ананасів, тому непарною має бути кількість ананасів і на 35-й день. Отже, єдиний плід, який на залишиться дереві, — ананас.

Приклад 6. Дано 10 чисел — одна одиниця і 9 нулів. Дозволяється вибирати два числа і замінювати кожне з них їх середнім арифметичним. Яке найменше число може виявитися на місці одиниці?

Розв'язання. Зрозуміло, найвигідніша стратегія — кожен раз замінювати те число, що опиняється на місці одиниці, на середнє арифметичне його і найменшого з решти чисел. Зрозуміло, якщо найменше з решти чисел менше від самого числа.

Дев'ять разів ми з цього алгоритму будемо вибирати другим числом нуль і замінювати обидва числа на їх середнє арифметичне, тобто на половину першого числа. В результаті замість одиниці буде стояти *129 =1512* , а замість нулів— степені двійки від мінус першого до мінус дев'ятого. Далі зменшувати вже нікуди.

Відповідь.1512

Приклад 4.7.У трьох клітинках квадратної таблиці 4*4 стоять знаки «–», а в інших — знаки «+»:

Дозволяється одночасно міняти знаки на протилежні в усіх клітинках, розташованих в одному рядку або в одному стовпці. Довести, що, скільки б ми не проводили таких змін знаків, нам не вдасться одержати таблицю з одних знаків «+».

Розв'язання. Замінимо знак «+» на число 1, знак «–» на число –1 і покажемо, що, скільки б ми не проводили змін знаків чисел рядків або стовпців, нам не вдасться одержати таблицю з одних одиниць.

		1	
	1		
		1	

Якщо у рядку (стовпці) стоять числа *a*, *b*, *c*, *d*, то при зміні знаків добуток чисел рядка (стовпця) не змінюється, бо $(-a)(-b)(-c)(-d)=abcd$. Тому при зміні знаків чисел одного рядка або стовпця не змінюється й добуток усіх чисел таблиці. Спочатку маємо таблицю, в якій добуток усіх чисел дорівнює –1. У таблиці з одних одиниць такий добуток дорівнює 1. Тому перехід до таблиці з одних одиниць неможливий.

Отже, перехід від заданої таблиці до таблиці з одних знаків «+» також неможливий.

Приклад 8. Дано три числа: *2, 2, 12* . Дозволяється будь-які два з них замінити двома такими: сумою, поділеною на *2* , та різницею, поділеною на *2* . Чи можливо, виконавши процедуру декілька разів, дістати трійку чисел: 1, *2* , *1+2* ?

Розв'язання. Неважко помітити, що

a+b22+a-b22=a2+b2 ,

тобто при виконанні таких процедур не змінюється сума квадратів трійки чисел. Початкова сума квадратів дорівнює *132* , а кінцева має дорівнювати *6+22* .

Відповідь. Неможливо.

Приклад 9. В одній клітинці квадратної таблиці 8*8 стоїть знак мінус, а в інших стоять плюси. Дозволяється за один хід в якомусь із квадратів 2*2 змінювати знаки на протилежні. Довести, що за допомогою таких ходів не можна отримати таблицю з одних плюсів.

Розв'язання. При заміні знаків у квадраті 2*2 на протилежні кількість мінусів може змінитись лише на 2 або на 4, тобто в усій таблиці кількість мінусів зберігає свою парність, а тому змінитись з 1 на 0 не може.

Приклад 10. На кожному з 44 дерев, що розміщені по колу, сидять по одному горобцю. Час від часу якісь два горобці перелітають на сусіднє дерево — один за годинниковою стрілкою, а другий — проти. Чи можуть усі горобці зібратися на одному дереві?

Розв'язання. Пронумеруємо дерева по колу з 1-го по 44-те. Сума номерів дерев, на яких сидять горобці, при їхньому перелітанні або не змінюється, або змінюється на 44, тому остача відділення цієї суми на 44 не змінюється. Спочатку ця остача дорівнювала 22, а якщо всі горобці сядуть на одне дерево, ця остача дорівнюватиме нулю. Отже, горобці не можуть зібратись на одному дереві.

Приклад 11. На координатній площині є чотири точки з цілими координатами. Дозволяється замінити будь-яку з цих точок на точку, симетричну їй відносно будь-якої іншої з цих точок. Чи можна за декілька таких операцій перейти від точок (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) до точок з координатами (0, 0), (1, 1), (3, 0), (2, −1).

Розв'язання. Очевидно, що можливість переходу від першої четвірки точок до другої рівносильна можливості переходу від другої четвірки точок до першої.

У другій четвірці точок різниця координат кожної точки дорівнює 0 або 3, тобто ділиться на 3. Якщо точка $M_2(x_2, y_2)$ симетрична точці $M_1(x_1, y_1)$ відносно точки $M_0(x_0, y_0)$, то їхні координати пов'язані рівностями $x0=x1 + x22, y0=y1 + y22$, звідки отримуємо:

$x2=2x0-x1,\ \ y2=2y0-y1,\ \ x2-y2=2x0-y0-x1-y1.$

Звідси видно, що коли різниця координат $x – y$ у якихось двох точок діляться на 3, то й різниця координат третьої точки теж ділиться на 3. Тому, виходячи з другої четвірки точок, не можна отримати точки (0, 1), (1, 0).

Відповідь. Ні.

Приклад 12. Числова послідовність $a1,\ \ a2,\ \ a3,\ \ ...$, в якій $a1=2,\ \ a2=$ = 500 та $a3$ = 2000, при всіх натуральних $n \geq 2$ задовольняє умову

$an + 2 + an + 1an + 1 + an - 1 = an + 1an - 1$.

Довести, що всі члени цієї послідовності є натуральними числами, причому $a2001$ ділиться без остачі на 2^{2001}.

Розв'язання. Елементарними перетвореннями отримаємо, що при всіх натуральних $n \geq 2$ виконується рівність

$an + 2an + 1=an + 1an - 1$, або $an + 2an + 1an=an + 1anan - 1$.

Отже, значення виразу $an + 1anan - 1$ не залежить від n (є інваріантом), а тому

$an + 2an + 1an=an + 1anan - 1= ... =a3a2a1=2.$

Отже, дана послідовність задовольняє рекурентне співвідношення: $a1 = 2,\ a2 =$ 500, $an + 1 = 2anan - 1$ при $n \geq 2$. Тому всі члени послідовності є натуральними числами, причому для будь-якого $n \geq 1$ число $an + 1an$ є парним. Враховуючи рівність

$a2001=a2001a2000\cdot a2000a1999\cdot \ldots \cdot a2a1\cdot a1$,

отримуємо, що *a2001* ділиться без остачі на 2^{2001}.

Приклад 13. На шаховій дошці стоїть чорний слон і біла тура. Білі, як водиться, ходять першими. Довести, що при правильній грі біла тура ніколи не опиниться під боєм чорного слона.

Розв'язання. Слон завжди залишатиметься на полях одного кольору (це і є інваріант даної задачі). Тому якщо тура кожним своїм ходом буде зупинятися на полі іншого кольору, її неможливо буде побити.

Приклад 14.На дошці написані числа 2, 6, −5, 3. Дозволяється: 1) збільшити будь-яке з цих чисел на 2 і зменшити будь-яке інше на 6; 2) збільшити будь-яке з цих чисел на 3, збільшити будь-яке інше на 1 і збільшити будь-яке третє на 4. Виконуючи в будь-якому порядку ці дві операції (якщо потрібно — багаторазово), зрівняти написані на дошці числа. Або довести, що зробити це неможливо.

Розв'язання. Ми можемо виконувати операції 1) і 2) скільки завгодно разів і в будь-якому порядку, однак зрівняти числа на дошці нам не вдасться. Але як довести, що спроби зрівняти числа на дошці марні? Ось тут нам і знадобиться поняття «інваріант». У даному конкретному випадку інваріантом буде остача від ділення на 4 суми записаних на дошці чисел. Операція 1) зменшує суму записаних на дошці чисел на 4. Операція 2) збільшує суму записаних на дошці чисел на 8. Виходить, обидві ці операції не змінюють остачу від ділення суми записаних на дошці чисел на 4. У вихідній комбінації чисел залишок від ділення суми чисел на 4 дорівнює 2. Якщо всі чотири числа дорівнюють один одному, то остача від ділення суми чисел на 4 дорівнює 0. Це і доводить, що операціями 1) і 2) зрівняти записані на дошці числа не можна.

Приклад 15. На шаховій дошці дозволяється перефарбувати з чорного кольору на білий і з білого — на чорний колір одразу всі клітинки якої-небудь горизонталі чи вертикалі. Чи може через кілька таких перефарбувань утворитися дошка, у якої є рівно одна чорна клітинка?

Розв'язання. При перефарбуванні горизонталі чи вертикалі, яка містить k чорних та $8–k$ білих клітинок, отримаємо $8–k$ чорних та k білих клітинок. При цьому кількість чорних клітинок зміниться на парне число, бо

$8- k- k = 8-2k = 24-k.$

Оскільки парність чорних клітинок зберігається, то із початкових 32 чорних клітинок ми не можемо отримати одну чорну клітинку.

Відповідь. Не можна.

Приклад 16. Було 5 аркушів паперу. Деякі з них розрізали на 5 кусків кожний. Потім деякі з одержаних кусків знову розрізали на 5 кусків і так зробили декілька разів. Чи можна в результаті виконання таких дій отримати 1975 кусків паперу?

Розв'язання. Після розрізання одного куска кількість кусків збільшується на 4. Тому остача від ділення кількості всіх кусків на 4 не змінюється. Але 5 при діленні на 4 дає остачу 1, а 1975 — остачу 3.

Відповідь. Не можна.

Приклад 17. В одній вершині куба написали число 1, в інших нулі. Можна додавати по 1 до чисел, які записані на кінцях довільного ребра. Чи можна добитися того, щоб всі числа ділились на 3?

Розв'язання. Пофарбуємо вершини куба в шаховому порядку. Після цього сума чисел в білих вершинах завжди буде відрізнятись на 1 від суми цифр в чорних вершинах, бо до тих і других кожен раз додається 1. Ці суми одночасно ділитися на 3 не можуть.

Відповідь. Не можна.

Приклад 18. 1989 чоловік вишикувані в шеренгу. Чи завжди їх можна вишукувати по росту, якщо дозволяється міняти місцями двох людей, які стоять через одного?

Розв'язання. При перестановці зберігається парність номера місця. Тому, коли самий високий стоїть на парному місці, він ніколи не стане першим.

Відповідь. Не завжди.

Приклад 19. У кутку квадрата 3*3 стоїть знак мінус, в усіх інших клітинках — плюси. Можна змінювати всі знаки в довільному рядку чи довільному стовпчику на протилежні. Чи можна одержати таблицю лише з одних плюсів?

Розв'язання. Кількість мінусів у кутовому квадраті 2*2 завжди буде непарною.

Відповідь. Не можна.

Приклад 20. Чи можна круг розрізати на декілька частин, з яких скласти квадрат? (Розрізи — це частинки прямих і дуги кіл.)

Розв'язання. Розглянемо інваріант: різниця сум довжин увігнутих і опуклих граничних дуг всіх частин. Ця величина не змінюється при розрізанні однієї частини на дві і при складанні однієї частини з двох.

Для одиничного круга цей інваріант дорівнює 2 , а для квадрата — нулю. Тому одержати «квадрат» неможливо.

Задачі на виграшні стратегії

Приклад 1. Двоє кладуть по черзі п'ятаки на круглий стіл. Програє той, хто не зможе покласти черговий п'ятак. Хто виграє?

Розв'язання. Виграє перший. Він кладе п'ятак в центр столу, після чого на будь-який хід другого у першого завжди є симетрична відповідь.

Приклад 2. Дві компанії *A* і *B* отримали право освітлювати шахову столицю Математика, яка по формі є прямокутною сіткою вулиць. Компанії по черзі ставлять на неосвітлене перехрестя прожектор, який освітлює весь північно-східний кут міста (від нуля до

90^{0}). Премію Бевза одержить та компанія, якій на своєму ході нічого буде освітлювати. Хто виграє при правильній грі, якщо починає компанія *A*?

Розв'язання. Самий північно-східний квартал міста буде освітлений у будь-якому випадку після першого ходу. Припустимо, у компанії *B* є виграшна стратегія. Тоді у неї є виграшна відповідь на хід компанії *A*, що полягає в освітленні тільки північно-східного кварталу. Але з цього ж ходу може почати гру компанія *A* і потім скористатися виграшною стратегією компанії *B*. Суперечність. Отже, виграшна стратегія у компанії *A* є і вона виграє.

Приклад 3. Двоє гравців по черзі розламують шоколадну плитку 6*8. За один хід дозволяється зробити прямолінійний розлом будь-якого зі шматків уздовж заглиблення на плитці. Програє той, хто не зможе зробити наступного ходу. У котрого з гравців є виграшна стратегія ?

Розв'язання. Перемога першого гравця досягається незалежно від його гри, все ж можна було б запропонувати для нього цілком осмислену стратегію. Припустимо, що своїм першим ходом він розламав плитку на дві однакові частини розмірами 6*4. Тоді, яку б із цих частин не розламав другий гравець, у першого є можливість зробити аналогічний (симетричний) розлом у тотожній їй другій частині. При цьому одержимо дві пари рівних між собою шматків. Тоді, який би шматок не розламав другий гравець, перший знову має змогу зробити аналогічний розлом шматка, який входить із розламаним в ту ж саму пару. Таким чином, скільки б не продовжувалася гра, ходи першого гравця не зможуть вичерпатися раніше, ніж ходи другого. А оскільки число розломів плитки є скінченним, ми дістаємо, що врешті-решт вичерпаються ходи обох гравців. З попередніх міркувань випливає, що останній хід при цьому буде за першим гравцем, який і здобуде перемогу.

Приклад 4. Двоє гравців по черзі ставлять слонів на клітинки шахової дошки так, що слони не б'ють один одного (колір слонів значення не має). Програє той, хто не може зробити хід. Хто з гравців може забезпечити собі виграш?

Розв'язання. Шахова дошка симетрична відносно свого центра, тому, на перший погляд, другий гравець на кожен хід першого має симетричний хід. Однак це не так, бо, якщо перший гравець ставить слона на одну з клітинок головної діагоналі, то другий гравець симетричного ходу не має.

Щоб розв'язати задачу за допомогою симетричної стратегії, необхідно знайти симетрію, при якій попередній хід суперника не перешкоджає дотриманню обраної стратегії. Такою є симетрія відносно прямої, що розділяє четверту і п'яту горизонталі. Симетричні відносно неї поля мають різний колір, і тому слони, поставлені на такі поля, не б'ють один одного.

Отже, другий гравець виграє, якщо на кожен хід першого гравця відповідає ходом, симетричним відносно вказаної прямої.

Приклад 5. Хлопчик та дівчинка по черзі зафарбовують клітинки прямокутної таблиці. За один хід треба зафарбувати дві не зафарбовані клітинки, які мають спільну сторону. Починає гру дівчинка, а програє той, хто немає можливості зробити хід. Хто переможе при правильній грі, якщо таблиця має розміри:

а) 2004*2006; б) 2005*2006?

Розв'язання. а) Переможе хлопчик. Після кожного ходу дівчинки йому треба зафарбувати ту пару клітинок, яка центрально-симетрична відносно центра прямокутника клітинкам, тільки що зафарбованими дівчинкою. Простіше кажучи, ходи хлопчика повинні бути центрально-симетричні ходам дівчинки. Клітинки для такого ходу хлопчика завжди будуть чистими. Адже після кожного ходу хлопчика набір не зафарбованих клітинок буде мати центр симетрії — центр прямокутника. І якщо дівчинка обере для свого ходу якісь дві чисті клітинки, то чистими будуть і клітинки для ходу хлопчика. Оскільки загальна кількість клітинок скінченна, гра колись закінчиться, а програти може лише дівчинка. Для стратегії хлопчика важливим є те, що центр прямокутника лежить у вершині клітинки.

б) Виграє дівчинка. Для прямокутника 2005*2006 центр симетрії лежить всередині спільної сторони двох клітинок, і першим ходом дівчинці треба зафарбувати ці дві клітинки. Далі вона повинна робити ходи, центрально-симет-ричні ходам хлопчика відносно центра прямокутника.

Приклад 6. Прямокутна шоколадка розділена 4 повздовжніми та 9 поперечними заглибленнями на 5*10 = 50 квадратних частин. Перший гравець розламує шоколадку по деякому заглибленню на дві прямокутні частини. Далі два гравці по черзі одну із отриманих частин по заглибленнях ділять на дві прямокутні частини. Хто виграє при правильній грі, якщо той, хто відламає частку 1*1:

а) програє;

б) виграє?

Розв'язання. В обох випадках виграє перший гравець, і першим своїм ходом він має розламати шоколадку на дві частини 5*5.

У варіанті а) на кожний хід другого гравця на одній половині шоколадки першому треба зробити такий же хід на іншій. Очевидно, що частку 1*1 раніше отримає другий гравець.

У варіанті б) перший гравець дублює ходи другого в іншій половині шоколадки, поки другий не відламає якусь частку 1*n. Тоді з цієї частини перший отримує частку 1*1.

Приклад 7. Дано смужку розміром 1*2005. Двоє учнів грають у гру, по черзі роблячи свої ходи. За один хід потрібно закреслити одну довільну клітинку смужки або деякі дві послідовні клітинки. Програє той, хто не зможе зробити хід. Хто може забезпечити собі виграш — перший гравець чи його суперник?

Розв'язання. Перемогу може забезпечити собі перший гравець. Першим ходом він закреслює 1003-тю (центральну) клітинку, а потім повторює ходи суперника симетрично відносно неї.

Приклад 8. (Обласна олімпіада). Два гравці записують по черзі числа 1 і –1 в одиничні клітинки таблиці розміром 1987*1987. Після того, як всі клітинки заповнені, для кожного рядка, стовпця і двох діагоналей таблиці підраховується добуток чисел, які там записані. Довести, що гравець, який робить перший хід, може грати так, щоб серед цих добутків було рівно 1990 додатних.

Розв'язання. Оскільки число 1987 непарне, то існує клітинка, центром якої є центр симетрії даної таблиці. Для кожної іншої клітинки існує клітинка, симетрична з нею відносно центра таблиці. Якщо перший гравець хоче домогтись вказаного в задачі результату, то своїм першим ходом він має записати в центральну клітинку число (−1), а після кожного ходу другого гравця йому слід записувати число протилежного знаку в клітинку, симетричну відносно центра таблиці із клітинкою «суперника». Якщо, наприклад, другий гравець своїм першим ходом записує число (+1) в клітинку першого стовпця, то перший гравець записує число (−1) в симетричну з нею клітинку 1987-го стовпця. Після цього обміну ходів в кожному із заданих стовпців залишиться по 1986 клітинок, тому в першому стовпцеві буде 993 + 1 число (+1) і 993 числа (−1), тобто добуток чисел буде дорівнювати –1. У 1987 стовпцеві буде 994 клітинки з числами (−1) і 993 — з числами (+1). Добуток всіх чисел дорівнює (+1). Таким чином, в тому рядку чи в тій діагоналі, де перший запис робить перший гравець, добуток чисел дорівнює (+1). Сюди відносяться, перш за все, обидві діагоналі, той рядок і той стовпець, які містять центральну клітинку (всього 4). Решта рядків і стовпців буде 1986 з додатними добутками і 1986 — з від'ємними.

1986 + 4 = 1990 — кількість додатних добутків.

Приклад 9. У рівностях * + * + * = *, * + * = *, * = * двоє вписують по черзі на свій розсуд замість зірочок цілі числа. Довести, що той, хто починає гру, завжди може досягти правильності усіх числових рівностей.

Розв'язання. Перший гравець повинен записати довільне ціле число замість однієї із зірочок другої рівності. Далі, записуючи числа в тій же рівності, що і його суперник, він матиме змогу записати останні числа кожної рівності, а отже, і добитися їх виконання.

Слід зауважити, що відступ від описаної стратегії може привести першого гравця і до поразки. Наприклад, суперник негайно міг би скористатися із вписування числа у третю рівність.

Приклад 10. Дано шахівницю 8*8 і прямокутні доміно 1*2. За один хід дозволяється накрити дві сусідні клітинки шахівниці так, щоб плитки доміно не перекривались. Програє той, хто не зможе зробити наступного ходу. У котрого з двох гравців є виграшна стратегія?

Розв'язання. Виграшна стратегія є у другого гравця. Для перемоги він кожного разу повинен ставити плитку доміно симетрично відносно центра дошки до плитки, поставленої перед цим його суперником.

Приклад 11. Двоє по черзі ставлять на вільні клітинки шахової дошки коней: один — білих, другий — чорних, роблячи це так, щоб виставлений кінь не міг бути взятий жодним із вже поставлених противником коней. Програє той, хто не може зробити черговий хід. Хто виграє при правильній грі: той хто починає гру чи його партнер — і як треба ходити, щоб виграти?

Розв'язання. Нехай другий гравець, роблячи черговий хід, ставить свого коня на клітинку, яка симетрична відносно центра дошки клітинці, на яку тільки що поставив коня його партнер. Доведемо, що вказана стратегія дозволяє другому гравцю завжди добитися перемоги. Для цього покажемо, що якщо перший гравець може зробити черговий хід, то черговий хід може зробити і його партнер.

В силу вибору стратегії, по-перше, є вільна клітинка, на яку другий гравець ставить коня. По-друге, цей кінь не може бути взятий тільки що поставленим конем партнера, бо ці коні знаходяться на клітинках одного кольору. По-третє, цей кінь не може бути взятим жодним з інших виставлених партнером коней: якби він міг бути взятий з клітинки *A*, то виставлений останнім кінь першого гравця міг би бути взятий конем із клітинки, симетричної *A* відносно центра.

Зауваження. Існують інші стратегії, які дозволяють завжди виграти тому, хто ходить другим. Наприклад, він може ставити коня на клітинку, симетричну клітинці, на яку тільки що поставив коня його партнер, відносно вертикальної (горизонтальної) осі симетрії дошки.